Exámenes de Selectividad

Matemáticas. Andalucía 2022, Extraordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Análisis

Calcula a sabiendo que $\lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{(\ln x)^3+2x} = 1$ (donde ln denota la función logaritmo neperiano).

Solución:

Se nos pide calcular el valor de a para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{(\ln x)^3+2x} = 1.$$

Para evaluar este límite cuando $x \to +\infty$, observamos el comportamiento del numerador y el denominador. El numerador es ax, que tiende a $+\infty$ si $a > 0$, a $-\infty$ si $a < 0$, y es 0 si $a = 0$. El denominador es $(\ln x)^3 + 2x$. Sabemos que $\ln x \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$, por lo que $(\ln x)^3 \to +\infty$. También, $2x \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$. Por lo tanto, el denominador tiende a $+\infty$.

Tenemos un límite de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ (si $a \neq 0$), por lo que podemos intentar simplificar la expresión dividiendo tanto el numerador como el denominador por la mayor potencia de x presente en el denominador, que es x:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{ax}{x}}{\frac{(\ln x)^3}{x} + \frac{2x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{\frac{(\ln x)^3}{x} + 2}$$

Ahora necesitamos evaluar el límite de $\frac{(\ln x)^3}{x}$ cuando $x \to +\infty$. Este es un límite conocido que tiende a 0. Podemos demostrarlo utilizando la Regla de L'Hôpital.

Consideremos el límite:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x}.$$

Este límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, así que aplicamos la Regla de L'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{d}{dx}((\ln x)^3)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3(\ln x)^2}{x}.$$

Este nuevo límite sigue siendo de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, así que aplicamos la Regla de L'Hôpital nuevamente:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{d}{dx}(3(\ln x)^2)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3 \cdot 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6\ln x}{x}.$$

Este límite sigue siendo de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, así que aplicamos la Regla de L'Hôpital una vez más:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{d}{dx}(6\ln x)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6 \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{x} = 0.$$

Entonces, $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = 0$. Sustituyendo este resultado en la expresión del límite original:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a}{\frac{(\ln x)^3}{x} + 2} = \frac{a}{0+2} = \frac{a}{2}.$$

Se nos da que este límite es igual a 1:

$$\frac{a}{2} = 1.$$

Resolviendo para a:

$$a = 2 \cdot 1 = 2.$$

Por lo tanto, el valor de a es:

$$\boxed{a = 2}$$

Ejercicio 2. Análisis

Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{f(x) = -x^2 + 12}$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.

Solución:

La función dada es $f(x) = -x^2 + 12$, cuya gráfica es una parábola que abre hacia abajo. Para encontrar los puntos donde la parábola intersecta el eje de abscisas (eje x), hacemos $f(x) = 0$:

$$-x^2 + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}.$$

El recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas se encuentra entre $x = -2\sqrt{3}$ y $x = 2\sqrt{3}$. Consideremos un rectángulo inscrito en este recinto con su base sobre el eje de abscisas. Debido a la simetría de la función $f(x)$ con respecto al eje y, podemos suponer que el rectángulo también es simétrico con respecto al eje y. Sean los vértices de la base del rectángulo sobre el eje x en los puntos $(-x, 0)$ y $(x, 0)$, donde $x > 0$. La longitud de la base del rectángulo es entonces

$$2x.$$

Los otros dos vértices del rectángulo estarán sobre la gráfica de la función $f(x)$. Sus coordenadas serán $(-x, f(-x))$ y $(x, f(x))$. Como $f(x) = -x^2+12$ es una función par ($f(-x) = -(-x)^2+12 = -x^2+12 = f(x)$), la altura del rectángulo será $f(x) = -x^2 + 12$. El área del rectángulo, A, en función de x es:

$$A(x) = \text{base} \cdot \text{altura} = (2x) \cdot (-x^2 + 12) = -2x^3 + 24x.$$

Queremos maximizar el área $A(x)$. Para ello, calculamos la primera derivada de $A(x)$ con respecto a x y la igualamos a cero:

$$A'(x) = \frac{d}{dx}(-2x^3 + 24x) = -6x^2 + 24.$$

Igualando la derivada a cero:

$$-6x^2 + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x^2 = 24 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2.$$

Como consideramos $x > 0$ (la mitad de la base), tomamos $x = 2$. Para verificar si este valor de x corresponde a un máximo, calculamos la segunda derivada de $A(x)$:

$$A''(x) = \frac{d}{dx}(-6x^2 + 24) = -12x.$$

Evaluamos la segunda derivada en $x = 2$:

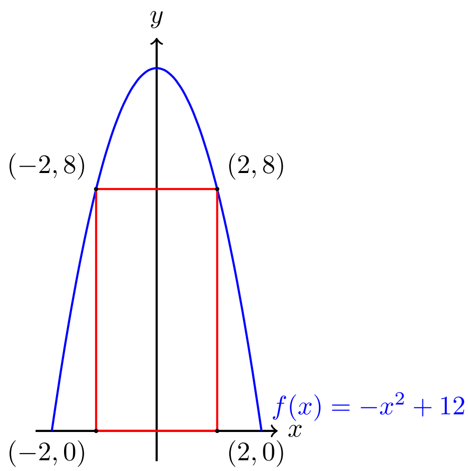
$$A''(2) = -12(2) = -24.$$

Como $A''(2) < 0$, el área tiene un máximo en $x = 2$. Ahora podemos encontrar los vértices del rectángulo y su área máxima.

- Vértices de la base: $(-x, 0) = (-2, 0)$ y $(x, 0) = (2, 0)$.
- Altura del rectángulo: $f(2) = -(2)^2 + 12 = -4 + 12 = 8\ u$.
- Vértices superiores: $(-x, f(x)) = (-2, 8)$ y $(x, f(x)) = (2, 8)$.

Los vértices del rectángulo son $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(-2, 8)$ y $(2, 8)$. El área máxima del rectángulo es:

$$A(2) = -2(2)^3 + 24(2) = -2(8) + 48 = -16 + 48 = 32\ u^2.$$



Por lo tanto, los vértices del rectángulo de área máxima son:

$$\boxed{(-2,0), \quad (2,0), \quad (-2,8), \quad (2,8), \quad \text{y su área máxima es 32 unidades cuadradas}}$$

Ejercicio 3. Análisis

Calcula $\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\,dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \sqrt{1+x}-1$).

Solución:

Se nos pide calcular la integral definida $\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\,dx$. Seguimos la sugerencia y efectuamos el cambio de variable $t = \sqrt{1+x}-1$. Primero, necesitamos expresar x en términos de t. De la sustitución, tenemos:

$$t = \sqrt{1+x}-1 \quad \Rightarrow \quad t+1 = \sqrt{1+x}.$$

Elevamos al cuadrado ambos lados para despejar $1+x$:

$$(t+1)^2 = 1+x \quad \Rightarrow \quad x = (t+1)^2 - 1.$$

Expandimos el cuadrado:

$$x = t^2 + 2t + 1 - 1 \quad \Rightarrow \quad x = t^2 + 2t.$$

A continuación, necesitamos encontrar el diferencial dx en términos de dt. Derivamos x con respecto a t:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2+2t) = 2t+2 \quad \Rightarrow \quad dx = (2t+2)\,dt = 2(t+1)\,dt.$$

Finalmente, debemos cambiar los límites de integración. Cuando $x = 3$, sustituimos en la expresión para t:

$$t = \sqrt{1+3}-1 = \sqrt{4}-1 = 2-1 = 1.$$

Cuando $x = 8$, sustituimos en la expresión para t:

$$t = \sqrt{1+8}-1 = \sqrt{9}-1 = 3-1 = 2.$$

Los nuevos límites de integración son de $t = 1$ a $t = 2$. Ahora podemos sustituir en la integral original:

$$\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{t}\cdot 2(t+1)\,dt = \int_1^2 \frac{2t+2}{t}\,dt = \int_1^2 \left(\frac{2t}{t}+\frac{2}{t}\right)dt = \int_1^2 \left(2+\frac{2}{t}\right)dt.$$

Ahora integramos la expresión con respecto a t:

$$\int \left(2+\frac{2}{t}\right)dt = 2t + 2\ln|t| + C.$$

Como los límites de integración son positivos, podemos escribir $\ln t$. Evaluamos la integral definida:

$$\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{t}\cdot 2(t+1)\,dt = [2t+2\ln t]_1^2 = (2(2)+2\ln 2)-(2(1)+2\ln 1) = 4+2\ln 2-2-0 = 2+2\ln 2.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\,dx = 2+2\ln 2}$$

Ejercicio 4. Análisis

Considera las funciones $\mathbf{f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ definidas por $\mathbf{f(x) = x^3 + 2}$ y $\mathbf{g(x) = -x^2 + 2x + 2}$.

a) **Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza sus gráficas.**
b) **Determina el área del recinto limitado por las gráficas de f y g en el primer cuadrante.**

Solución:

a) **Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza sus gráficas.**

Para encontrar los puntos de corte de las gráficas de $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$, debemos resolver la ecuación $f(x) = g(x)$:

$$x^3 + 2 = -x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad x^3 = -x^2 + 2x.$$

Pasamos todos los términos al lado izquierdo:

$$x^3 + x^2 - 2x = 0.$$

Factorizamos x:

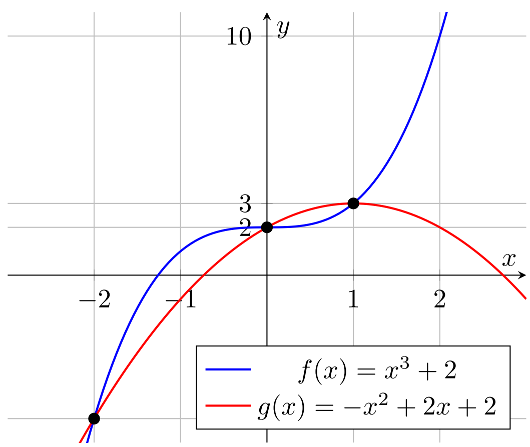
$$x(x^2 + x - 2) = 0$$

Ahora factorizamos la ecuación cuadrática $x^2 + x - 2 = 0$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -2 \quad \text{o} \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad x(x+2)(x-1) = 0.$$

Las soluciones son $x = 0$, $x = -2$ y $x = 1$. Calculamos las coordenadas y correspondientes para cada valor de x utilizando cualquiera de las funciones, por ejemplo, $f(x)$:

- Para $x = 0$: $f(0) = 0^3 + 2 = 2$. El punto de corte es $(0, 2)$.
- Para $x = -2$: $f(-2) = (-2)^3 + 2 = -8 + 2 = -6$. El punto de corte es $(-2, -6)$.
- Para $x = 1$: $f(1) = 1^3 + 2 = 1 + 2 = 3$. El punto de corte es $(1, 3)$.



Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Los puntos de corte de las gráficas de } f \text{ y } g \text{ son} \quad (0, 2), \quad (-2, -6), \quad (1, 3).}$$

b) **Determina el área del recinto limitado por las gráficas de f y g en el primer cuadrante.**

En el primer cuadrante, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Los puntos de corte en el primer cuadrante son $(0, 2)$ y $(1, 3)$. Para calcular el área del recinto limitado por las gráficas de f y g entre $x = 0$ y $x = 1$, necesitamos determinar cuál función está por encima de la otra en este intervalo. Consideremos un valor de x entre 0 y 1, por ejemplo, $x = 0,5$:

$$f(0,5) = (0,5)^3 + 2 = 0,125 + 2 = 2,125,$$

$$g(0,5) = -(0,5)^2 + 2(0,5) + 2 = -0,25 + 1 + 2 = 2,75.$$

Como $g(0,5) > f(0,5)$, la gráfica de $g(x)$ está por encima de la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[0,1]$. El área del recinto está dada por la integral definida de la diferencia entre las dos funciones desde $x = 0$ hasta $x = 1$:

$$\text{Área} = \int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx.$$

Sustituimos las expresiones de $f(x)$ y $g(x)$:

$$\text{Área} = \int_0^1 ((-x^2 + 2x + 2) - (x^3 + 2))\,dx = \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x)\,dx.$$

Calculamos la integral:

$$\text{Área} = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^1 = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1$$

Evaluamos en los límites de integración mediante la Regla de Barrow:

$$\text{Área} = \left(-\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} + 1^2\right) - \left(-\frac{0^4}{4} - \frac{0^3}{3} + 0^2\right) = \frac{5}{12}\ u^2.$$

Por lo tanto, el área del recinto limitado por las gráficas de f y g en el primer cuadrante es:

$$\boxed{\frac{5}{12}\ \text{unidades cuadradas}}$$

Ejercicio 5. Álgebra

Considera las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$**,** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$**.**

a) **Determina los valores de a para los que la matriz B no tiene inversa.**
b) **Para a = 1 calcula X tal que AXB = C, si es posible.**

Solución:

a) **Determina los valores de a para los que la matriz B no tiene inversa.**

Una matriz no tiene inversa si y solo si su determinante es igual a cero. Calculamos el determinante de la matriz B:

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} 2 & a \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (a \cdot 0 - 1 \cdot 2) - 1 \cdot (2 \cdot 0 - 1 \cdot 2) + a \cdot (2 \cdot 2 - a \cdot 2) \\
&= 1 \cdot (0 - 2) - 1 \cdot (0 - 2) + a \cdot (4 - 2a) \\
&= -2 - (-2) + 4a - 2a^2 \\
&= -2 + 2 + 4a - 2a^2 \\
&= 4a - 2a^2.
\end{aligned}$$

Para que la matriz B no tenga inversa, su determinante debe ser cero:

$$4a - 2a^2 = 0.$$

Factorizamos la expresión:

$$2a(2 - a) = 0.$$

Esto implica que $2a = 0$ o $2 - a = 0$, es decir, $a = 0$ o $a = 2$.

Por lo tanto, la matriz B no tiene inversa para los valores:

$$\boxed{a = 0 \quad \text{y} \quad a = 2}$$

b) **Para a = 1 calcula X tal que AXB = C, si es posible.**

Para $a = 1$, las matrices son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación matricial es $AXB = C$. Si las matrices A y B tienen inversa, podemos despejar X multiplicando por las inversas correspondientes:

$$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \quad \Rightarrow \quad IXI = A^{-1}CB^{-1} \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Primero, calculamos la inversa de A. El determinante de A es $\det(A) = (1)(1) - (0)(-2) = 1 \neq 0$. La inversa de una matriz 2×2, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, es $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Entonces,

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -0 \\ -(-2) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

A continuación, calculamos la inversa de B para $a = 1$. Ya calculamos el determinante de B para un valor general de a: $\det(B) = 4a - 2a^2$. Para $a = 1$, $\det(B) = 4(1) - 2(1)^2 = 4 - 2 = 2 \neq 0$. La matriz de cofactores de B para $a = 1$ es:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$
$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$
$$C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

La matriz de cofactores es $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. La matriz adjunta es la transpuesta de la matriz de cofactores: $\operatorname{adj}(B) = C^T = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La inversa de B es:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\operatorname{adj}(B) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos $X = A^{-1}CB^{-1}$. Primero, multiplicamos A^{-1} por C:

$$A^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 2 & 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) & 1\cdot(-2) + 0\cdot(-1) \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot 0 + 1\cdot(-1) & 2\cdot(-2) + 1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, multiplicamos $(A^{-1}C)$ por B^{-1}:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1(-1) + 0(1) + (-2)(1) & 1(1) + 0(-1) + (-2)(0) & 1(0) + 0(1/2) + (-2)(-1/2) \\ 4(-1) + (-1)(1) + (-5)(1) & 4(1) + (-1)(-1) + (-5)(0) & 4(0) + (-1)(1/2) + (-5)(-1/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + 0 - 2 & 1 + 0 + 0 & 0 + 0 + 1 \\ -4 - 1 - 5 & 4 + 1 + 0 & 0 - 1/2 + 5/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 4/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $\mathbf{a = 1}$, la matriz X es:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 6. Álgebra

Se sabe que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\mathbf{2}.$$

a) Calcula:

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}.$$

b) Calcula:

$$\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}.$$

Solución:

a) Calcula:

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}.$$

Sea $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$. Queremos calcular el determinante

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}.$$

Podemos obtener la matriz de D_1 a partir de la matriz de D mediante las siguientes operaciones:

1. Intercambiar la segunda y la tercera columna. Esta operación cambia el signo del determinante:

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ x & z & y \end{vmatrix} = -D = -(-2) = 2.$$

2. Multiplicar la tercera fila por 2:

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ 2x & 2z & 2y \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 = 4.$$

3. Intercambiar la segunda y la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ p & r & q \end{vmatrix} = -4.$$

4. Multiplicar la tercera fila por -3:

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = -3 \cdot (-4) = 12.$$

Por lo tanto, el valor del determinante es:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = 12}$$

b) Calcula:

$$\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}.$$

Sea $D_2 = \begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$. Podemos usar las propiedades de los determinantes para simplificar esta expresión. Separamos la segunda columna en dos:

$$D_2 = \begin{vmatrix} x & a & -2a \\ y & b & -2b \\ z & c & -2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & -3p & -2a \\ y & -3q & -2b \\ z & -3r & -2c \end{vmatrix}.$$

En el primer determinante, la segunda y la tercera columna son proporcionales (la tercera es -2 veces la segunda), por lo que el determinante es 0:

$$\begin{vmatrix} x & a & -2a \\ y & b & -2b \\ z & c & -2c \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} x & a & a \\ y & b & b \\ z & c & c \end{vmatrix} = 0.$$

Para el segundo determinante, factorizamos -3 de la segunda columna:

$$\begin{vmatrix} x & -3p & -2a \\ y & -3q & -2b \\ z & -3r & -2c \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} x & p & -2a \\ y & q & -2b \\ z & r & -2c \end{vmatrix}.$$

Ahora factorizamos -2 de la tercera columna:

$$-3 \begin{vmatrix} x & p & -2a \\ y & q & -2b \\ z & r & -2c \end{vmatrix} = -3 \cdot (-2) \begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix}.$$

Intercambiamos la primera y la tercera columna (cambia el signo):

$$-6 \begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}.$$

Tomamos la transpuesta de la matriz (no cambia el determinante):

$$-6 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -6 \cdot (-2) = 12.$$

Por lo tanto, el valor del determinante es:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = 12}$$

Ejercicio 7. Geometría

Considera las rectas $\mathbf{r \equiv x+1 = y-a = -z}$ y $\mathbf{s} \equiv \begin{cases} x = 5+2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2-\lambda \end{cases}$.

a) **Calcula a para que r y s se corten. Determina dicho punto de corte.**
b) **Halla la ecuación del plano que pasa por $\mathbf{P(8,-7,2)}$ y que contiene a la recta s.**

Solución:

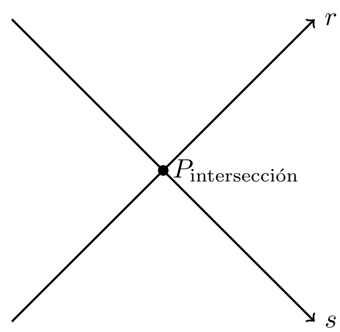
a) **Calcula a para que r y s se corten. Determina dicho punto de corte.**

Primero, escribimos la ecuación de la recta r en forma paramétrica. Sea $r \equiv x+1 = y-a = -z = \mu$. Entonces, las ecuaciones paramétricas de r son:

$$r \equiv \begin{cases} x = \mu - 1 \\ y = \mu + a \\ z = -\mu \end{cases}.$$

La recta s ya está dada en forma paramétrica:

$$s \equiv \begin{cases} x = 5+2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2-\lambda \end{cases}.$$



Para que las rectas r y s se corten, debe existir un punto que pertenezca a ambas rectas. Igualamos las coordenadas correspondientes:

$$\begin{aligned} \mu - 1 &= 5 + 2\lambda, \\ \mu + a &= -3, \\ -\mu &= 2 - \lambda. \end{aligned}$$

De la segunda ecuación, despejamos μ:

$$\mu = -3 - a$$

Sustituimos esta expresión de μ en las otras dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} (-3-a) - 1 = 5 + 2\lambda \quad &\Rightarrow \quad -4 - a = 5 + 2\lambda \quad \Rightarrow \quad 2\lambda = -9 - a, \\ -(-3-a) = 2 - \lambda \quad &\Rightarrow \quad 3 + a = 2 - \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 - a. \end{aligned}$$

Resolvemos por sustitución:

$$2(-1-a) = -9 - a \quad \Rightarrow \quad 7 = a$$

Así, el valor de a para que las rectas se corten es $a = 7$. Para encontrar el punto de corte, sustituimos $a = 7$ en la expresión para λ (o μ):

$$\lambda = -1 - a = -1 - 7 = -8.$$

Sustituimos $\lambda = -8$ en las ecuaciones paramétricas de s:

$$x = 5 + 2(-8) = 5 - 16 = -11, \quad y = -3, \quad z = 2 - (-8) = 2 + 8 = 10.$$

El punto de corte es $(-11, -3, 10)$.

Por lo tanto, para $\mathbf{a = 7}$, las rectas se cortan en el punto:

$$\boxed{(-11, -3, 10)}$$

b) Halla la ecuación del plano que pasa por $\mathbf{P(8, -7, 2)}$ y que contiene a la recta s.

Para determinar dicho plano, primero observamos que la recta s se encuentra dada en forma paramétrica. Un punto cualquiera de s se obtiene tomando $\lambda = 0$, lo que proporciona

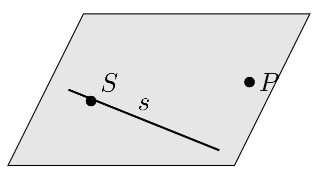
$$S(5,\ -3,\ 2).$$

Además, la dirección de la recta s se lee directamente de sus parámetros, resultando

$$\vec{v}_s = (2,\ 0,\ -1).$$

Como el plano debe incluir tanto la recta s como el punto $P(8, -7, 2)$, necesitamos otra dirección independiente dentro del plano. Para ello, consideramos el vector que va desde el punto S (en la recta) hasta P, es decir

$$\overrightarrow{SP} = \big(8 - 5,\ -7 - (-3),\ 2 - 2\big) = (3,\ -4,\ 0).$$



En un plano, dos direcciones cualesquiera que pertenezcan a él permiten encontrar un vector normal mediante el producto vectorial. Por tanto, el vector normal $\vec{n}$ de nuestro plano se obtiene como

$$\vec{n} = \vec{v}_s \times \overrightarrow{SP} = (2,\ 0,\ -1)\ \times\ (3,\ -4,\ 0).$$

El determinante correspondiente nos da

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0 \cdot 0 - (-1) \cdot (-4)) - \mathbf{j}(2 \cdot 0 - (-1) \cdot 3) + \mathbf{k}(2 \cdot (-4) - 0 \cdot 3),$$

lo que se traduce en

$$\vec{n} = \big(-4,\ -3,\ -8\big).$$

Podríamos dejarlo tal cual o tomar su opuesto $(4,\ 3,\ 8)$ para mayor comodidad.
Teniendo un vector normal $\vec{n} = (A, B, C)$ y un punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ perteneciente al plano, la ecuación se escribe como

$$A\,(x - x_0)\ +\ B\,(y - y_0)\ +\ C\,(z - z_0) = 0.$$

En este caso, podemos usar como punto Q cualquiera que sepamos que está en el plano, por ejemplo $S(5,-3,2)$ de la recta. Con $\vec{n}=(4,\,3,\,8)$ y $Q=S$, la ecuación se vuelve

$$4\,(x-5)\;+\;3\,(y+3)\;+\;8\,(z-2)=0.$$

Desarrollando y simplificando se obtiene

$$4x+3y+8z-27=0.$$

Por último, verificamos que el plano también contiene el punto $P(8,-7,2)$ sustituyéndolo en la ecuación (verificación que, al hacerse, da cero).

Por lo tanto, el plano pedido es:

$$\boxed{4x+3y+8z-27=0}$$

Ejercicio 8. Geometría

Sean el plano $\pi \equiv \mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z} = \mathbf{2}$ y la recta $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x} = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{3}} = \mathbf{z} - \mathbf{1}$.

a) **Calcula, si existe, el punto de intersección de π y r.**
b) **Dado el punto $\mathbf{Q}(\mathbf{2}, \mathbf{6}, \mathbf{3})$, halla su simétrico respecto del plano π.**

Solución:

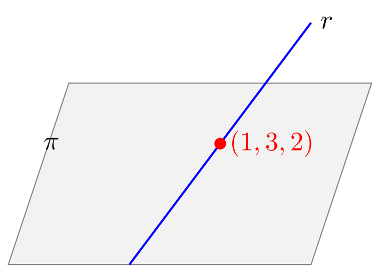
a) **Calcula, si existe, el punto de intersección de π y r.**

La recta puede parametrizarse usando $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$r: \quad x = \lambda, \quad y = 3\lambda, \quad z = \lambda + 1.$$

Sustituyendo en el plano π:

$$\lambda + 3\lambda - (\lambda + 1) = 2 \quad \Rightarrow \quad 3\lambda - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1.$$



Así, el punto de intersección es:

$$(1, 3, 2).$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{(1, 3, 2)}$$

b) **Dado el punto $\mathbf{Q}(\mathbf{2}, \mathbf{6}, \mathbf{3})$, halla su simétrico respecto del plano π.**

Usamos la fórmula del punto simétrico Q' respecto de un plano:

$$Q' = Q - 2\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}(A, B, C)$$

siendo $\pi : x + y - z - 2 = 0$, tenemos:

$$(A, B, C) = (1, 1, -1), \quad D = -2, \quad Q = (2, 6, 3).$$

Calculamos primero la distancia numerador:

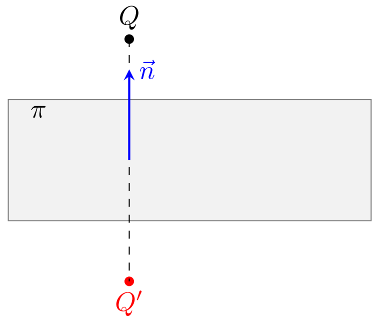
$$1 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + (-1) \cdot 3 - 2 = 2 + 6 - 3 - 2 = 3.$$

Luego:

$$Q' = (2, 6, 3) - 2\frac{3}{1^2 + 1^2 + (-1)^2}(1, 1, -1) = (2, 6, 3) - 2\frac{3}{3}(1, 1, -1).$$

Simplificando:

$$Q' = (2, 6, 3) - 2(1, 1, -1) = (2, 6, 3) - (2, 2, -2) = (0, 4, 5).$$



Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{(0, 4, 5)}$$